נוסחת השורשים = נוסחת הפתרונות

ראשית כל חשוב להבין מה משמעות השם "נוסחת השורשים"? שורש של משוואה הוא למעשה כינוי נוסף לפתרון המשוואה, לכן נוסחת השורשים היא למעשה "נוסחת הפתרונות".
נוסחת השורשים מסייעת לנו לפתור משוואות ריבועיות עם משתנה אחד, מהצורה: $ax^2+bx+c=0$. חשוב לציין כי במשוואות מסוג זה $a \neq 0$ (שכן אם $a \neq 0$, אז המשוואה כבר לא תהיה משוואה ריבועית)

a,b,c הינם מספרים קבועים ו-x הינו המשתנה במשוואה, כאשר a הינו מקדם של ה-x^2, b הינו מקדם של ה-x ו -c הינו מספר בפני עצמו הנקרא גם איבר חופשי (בעצם כל מה שנשאר במשוואה שלא כופל את x או את x^2).

למשוואה ריבועית מהצורה: $ax^2+bx+c=0$ אפשרי שיהיו שני פתרונות שיופיעו כ- x_1 ו-x_2 ואלה למעשה שורשי המשוואה.
כעת נציג דוגמאות למשוואות ריבועיות:

$x^2+8x-9=0$
$a=1$
$b=8$
$c=-9$

$2x^2-5x+2=0$
$a=2$
$b=-5$
$c=2$

כדי להגיע לפתרונות של המשוואות הללו כל שעלינו לעשות הוא להציב את ערכי ה- a,b וה- c **בנוסחת השורשים** ולפתור:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

לרוב בנוסחה זו מגיעים לשני פתרונות שונים, אך לפעמים מגיעים לפתרון יחיד או למצב בו אין פתרון כלל.

לעיתים ניתן לפתור את המשוואה הריבועית גם באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר (דו-איבר בריבוע) או באמצעות הטרינום.

Copyright © "Your Way" - All Rights Reserved
www.yourway.org.il

<u>פתרון לדוגמא:</u>

$$x^2+8x-9=0$$

כלומר :

$$a=1\ ,\ b=8\ ,\ c=-9$$

ובהצבה בנוסחה נקבל :

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\quad=$$

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot(-9)}}{2\cdot 1}=$$

$$=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{2}=$$

$$=\frac{-8\pm 10}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-8-10}{2}=\dfrac{-18}{2}=-9\\ x_2=\dfrac{-8+10}{2}=\dfrac{2}{2}=1\end{cases}$$

כלומר פיתרון אחד הוא 9- והפיתרון השני הוא 1. אם נרצה לבדוק ולהיות בטוחים שזה הפיתרון נציב במשוואה המקורית ונוודא שאכן מתקבל שיוויון בשני המקרים.

$x=-9$:

$$(-9)^2+8(-9)-9=0$$
$$81-72-9=0$$
$$81-81=0$$
$$0=0$$

$x=1$:

$$1^2+8\cdot 1-9=0$$
$$1+8-9=0$$
$$9-9=0$$
$$0=0$$

Copyright © “Your Way” - All Rights Reserved
www.yourway.org.il

העשרה - הוכחת נוסחת השורשים

אפשר להוכיח את הנוסחה לפתרונות המשוואה בטכניקת ה-"השלמה לריבוע" :המשוואה הנתונה היא:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

נכפיל את המשוואה ב-4a ונקבל:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

ששקול למשוואה:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

נוסיף לכל אגף את הביטוי b^2, כדי להשלים לריבוע באגף שמאל:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

על האגף השמאלי נפעיל את נוסחאות הכפל המקוצר:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

כעת נוציא שורש ריבועי משני האגפים:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

נחסר b משני צדדי המשוואה כדי לבודד את-x :

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

נחלק ב-2a ונקבל - $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Copyright © "Your Way" - All Rights Reserved
www.yourway.org.il